



Escola de Camins
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

Resonancia de estructuras de puentes: viabilidad y métodos de control TMD

Treball realitzat per:

Toni Riera Roig

Dirigit per:

M. Rosa Estela Carbonell

Grau en:

Enginyeria Civil

Barcelona, 19/09/2018

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE GRAU

PREFACIO

Este proyecto es un trabajo desarrollado paralelamente para la Escuela de Caminos (ETSECCPB) de la Universidad Politécnica de Cataluña y para la École Polytechnique, que debe entenderse en un contexto de doble diploma entre ambas universidades. El trabajo responde tanto al Trabajo de Final de Grado del último año del grado de ingeniería civil de la UPC, como al proyecto "*Modal*" del segundo año del *Cycle d'ingénieur polytechnicien* de la École Polytechnique. Una primera parte, de carácter principalmente experimental y descrita al final de este documento, fue objeto de evaluación del segundo de los proyectos mencionados. Para el TFG, se presenta este trabajo, que incluye tanto la primera parte comentada anteriormente, como un estudio de carácter documental, que pretende, en primer lugar, presentar con un cierto formalismo teórico el tema tratado, y en segundo lugar, justificar el porqué de las decisiones tomadas en la realización de los ensayos que comentaremos más adelante.

ÍNDICE

1. Introducción	4
2. Conceptos básicos: resonancia, efectos y prevención	5
2.1 El puente de Tacoma	5
2.2 Sistemas de control	6
2.3 <i>Tuned Mass Damper</i> (TMD)	7
3. Oscilador simple amortiguado	9
4. Resonancia en medios continuos	11
4.1 Sistema a dos grados de libertad	11
4.2 Sistema a n grados de libertad	13
4.3 Frecuencias y modos de resonancia de una viga	15
5. Análisis numéricos de frecuencias y modos naturales de una viga	18
6. Aplicaciones	21
7. Efecto de un controlador TMD sobre la resonancia de una viga	23
7.1 Construcción del sistema	23
7.2 Resultados	25
8. Proyecto <i>Modal</i> de mecánica	30
8.1 Metodología	30
8.2 Desarrollo del modelo y construcción	32
8.3 Ensayos numéricos	34
8.4 Ensayos experimentales	34
8.5 Resultados	36
9. Conclusión	38
10. Bibliografía	39

1. INTRODUCCIÓN

La estática de las estructuras, tanto las de ingeniería civil como las de edificación, es tan evidente como relativa: No están diseñadas para desplazarse, pero es imposible impedir su oscilación natural. En este sentido, tanto el viento como los terremotos son fuentes de vibraciones forzadas en estructuras, responsables, en algunos casos, tanto de su deterioro continuado como de su colapso directo, y, por lo tanto, también de riesgos de seguridad para las personas, fallos en el funcionamiento de sistemas asociados, y pérdidas económicas importantes.

Existen diversos casos documentados del colapso de estructuras a causa de excitaciones exteriores, destacando especialmente el del puente de Tacoma, en el estado de Washington de los Estados Unidos. Sin embargo, su explicación no pasa siempre por la simple aplicación de un esfuerzo para el cual no estaba dimensionada la estructura; en el caso anterior, la variación temporal del esfuerzo y las características de la estructura son clave para entender el desenlace del suceso.

Por otro lado, la fascinación popular por los rascacielos y otras grandes obras de ingeniería ha hecho que hasta una persona inexperta sobre el tema sepa sobre la existencia de grandes péndulos en la cima de algunos rascacielos, y aunque no conozca realmente su funcionamiento, sabe que su objetivo es reducir el efecto de los terremotos en estos edificios. ¿Son estos los únicos sistemas de control que existen para este tipo de sucesos? ¿Qué principio se esconde detrás de su funcionamiento? ¿Y qué grado de eficacia pueden llegar a alcanzar?

Este documento intenta dar respuesta a los problemas planteados anteriormente de diversas formas. En primer lugar, a nivel analítico, para definir claramente la situación a la cual nos enfrentamos y presentar los parámetros involucrados en los casos más comunes. Seguidamente, a nivel numérico, lo cual nos permitirá obtener, en el caso de geometrías complejas, resultados similares a los que buscábamos mediante el estudio analítico. Esto será acompañado por ejemplos que describan pertinentemente el problema (véase el puente de Tacoma mencionado anteriormente) y de las definiciones necesarias para su buen entendimiento, empezando por los conceptos de base.

2. CONCEPTOS BÁSICOS:

RESONANCIA, EFECTOS Y PREVENCIÓN

Cuando un niño se balancea en un columpio, sabe intuitivamente qué hacer para llegar cada vez más alto: Cuando está detrás, parado, hace fuerza sobre el sillín para tirarlo más hacia atrás, y cuando está delante, hace fuerza para tirarlo más hacia delante. Esta manera de aplicar la fuerza sobre el columpio es la que naturalmente le parece la óptima para conseguir grandes amplitudes.

Esta misma idea puede extrapolarse a la mecánica para entender qué es la resonancia y cómo funciona. El niño proporciona una cantidad de energía al columpio, pero esta solamente se aprovechará en forma de energía cinética si la energía es aplicada en el momento indicado. Cabe destacar este último punto, que es el cuándo se aplica el esfuerzo el factor principal que hace aumentar la amplitud de la oscilación, y no cuánto esfuerzo se aplica, puesto que si se hace de la forma equivocada este puede llegar incluso a reducir su velocidad.

En mecánica, se habla de frecuencias de resonancia para describir esta característica. Estas frecuencias de resonancia, o frecuencias naturales, son características de los cuerpos capaces de vibrar, y nos indican, en el caso de excitar estos cuerpos mediante una fuerza harmónica, cuál tiene que ser su frecuencia de oscilación para conseguir la máxima respuesta posible. En este sentido, la resonancia se entiende como el hecho que un cuerpo, sometido a una fuerza periódica, responda con grandes amplitudes cuando la frecuencia de la fuerza aplicada se acerca a su frecuencia natural de vibración. Se entiende como que esa frecuencia en concreto maximiza la absorción de energía por parte del cuerpo en forma de energía cinética.

En mecánica de estructuras, su efecto es peligroso: existen diversos tipos de fuerzas harmónicas que se aplican sobre ellas, siendo las más comunes los terremotos o el efecto que el viento puede ejercer sobre ellas. Estos fenómenos pueden tener frecuencias cercanas a las frecuencias de resonancia de la estructura e imponerle oscilaciones de una amplitud que no sea capaz de aguantar. Hasta la marcha militar está prohibida en los puentes, porque la excitación impuesta por los pasos de los militares puede tener una frecuencia cercana a la del puente (véase, por ejemplo, el caso del puente de Broughton).

2.1 El puente de Tacoma

Como ya hemos dicho, el fenómeno de la resonancia puede extrapolarse a estructuras complejas; siendo el caso más notable el del puente del estrecho de *Tacoma Narrows*, cuya construcción y colapso tuvieron lugar el año 1940 [11]. El

caso fue bien documentado, puesto que había un ingeniero evaluándolo desde que se empezó a ver cómo se comportaba. Sus impactantes imágenes (Figura 1) ponen en evidencia las consecuencias que pueden tener las vibraciones forzadas no controladas en estructuras.

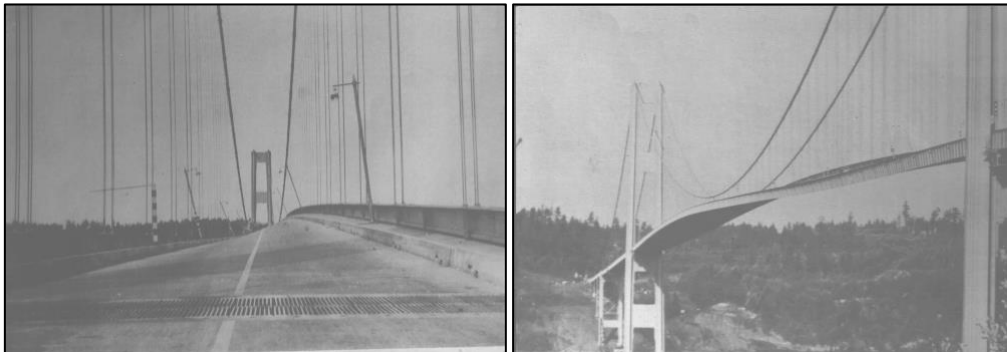


Figura 1 [11]: Oscilación del puente de *Tacoma Narrows* a causa del efecto del viento.

En su momento fue el tercer puente más largo del mundo; sin embargo, era mucho más ligero, estrecho y flexible que otros puentes de equivalente longitud. Estas características hicieron de él una estructura propensa a sufrir oscilaciones muy amplias, incluso a causa de vientos moderados.

Fueron diversos los métodos utilizados para reducir estas oscilaciones: tirantes anclados al suelo, vigas, soportes y hasta un amortiguador. No obstante, no pudieron evitar el colapso del puente, y el 7 de noviembre del 1940, tras sufrir giros transversales del tablero superiores a los 45° , este se desmoronó.

Existen diversas hipótesis sobre el desarrollo de este suceso, pero se considera que las oscilaciones que el puente sufría eran fruto de su resonancia por el paso del viento alrededor de su sección transversal, a causa de la aparición de vórtices alternativamente en la parte superior e inferior del tablero que inducían una fuerza armónica de torsión sobre la longitud de la estructura.

El problema que planteamos es, pues, una realidad en las estructuras de ingeniería civil. El caso del puente de Tacoma ha sido intensamente documentado y analizado, y paralelamente se han desarrollado modelos matemáticos y métodos numéricos que permiten tener un mejor conocimiento de este suceso. En apartados posteriores volveremos a hacer referencia a ellos.

2.2 Sistemas de control

Como ya hemos dicho, ya en su momento se plantearon diversos métodos de control de las oscilaciones del puente de Tacoma. La tendencia, a lo largo de los años, ha sido de aumentar tanto la flexibilidad de los puentes como la carga que puedan soportar, mientras que su peso ha ido disminuyendo. Esto es contrario a la idea de reforzar y rigidizar la estructura frente a las acciones exteriores como pueden ser el viento o los terremotos, por lo que una rama de los métodos que se han

desarrollado se ha basado en la introducción de sistemas de control en las estructuras que, en caso de excitación exterior, respondan a ella produciendo fuerzas de reacción adaptadas a la intensidad entrante. En este sentido, los sistemas de control creados pueden clasificarse en tres grupos diferentes [9]: los sistemas de control pasivo, los sistemas de control activo y los sistemas de control semiactivos.

- El control pasivo consiste en la utilización de un dispositivo que no necesite apoyo externo (medidas o energía) y que sea capaz de mitigar y disipar la transmisión de esfuerzo y la energía introducidos en la estructura.
- El control activo consiste en la introducción de una o varias fuerzas en diversos puntos de la estructura en función de medidas realizadas sobre su estado. Por lo tanto, este exige un *input*, que vendrá de sensores en la estructura, y todo un sistema que lo trate y que lo transforme en la respuesta buscada.
- El control semiactivo es una combinación de los dos anteriores, que busca modificar las propiedades mecánicas de un sistema de control pasivo a partir de una pequeña fuente de energía.

2.3 Tuned Mass Dampers (TMD)

Los TMD son, actualmente, unos de los dispositivos más frecuentes en el control de vibraciones de estructuras de ingeniería civil, y son utilizados desde en edificios hasta en pasarelas o puentes atirantados [9]. Existen dos tipos distintos, en función de su implementación: Los primeros son sistemas de la forma masa – resorte – amortiguador, como es el caso del sistema instalado en el edificio Citicorp de Nueva York; los segundos son los TMD pendulares, como el instalado en el edificio Taipei 101 (Figura 2)

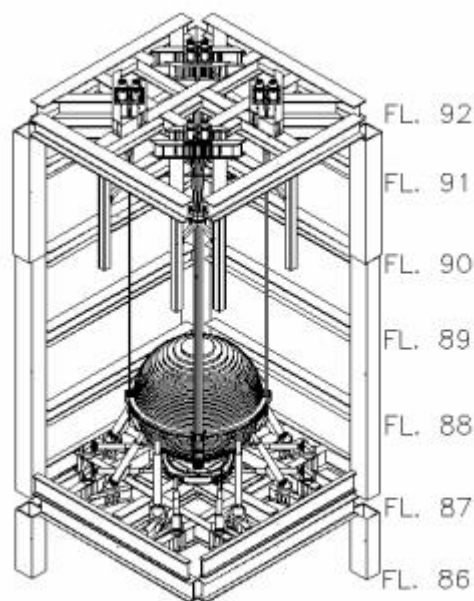


Figura 2 [3]: Péndulo del *Tuned Mass Damper* instalado en el edificio Taipei 101.

El funcionamiento de los TMD se basa en la transmisión de energía de la estructura principal al sistema de control, el cual la convierte en energía cinética [8]. Son sistemas de control pasivo, cuyo funcionamiento es completamente dependiente de su correcta calibración: La respuesta de la estructura a la excitación exterior es modificada exclusivamente en un rango determinado de frecuencias que dependerá de los parámetros que definen el comportamiento del sistema de control. El rango de frecuencias de control será ese en el que se encuentre la frecuencia de resonancia de la estructura, pues son las vibraciones de mayor amplitud las que suponen un mayor peligro. Por ejemplo, en el caso de un péndulo simple, la frecuencia de vibración depende de su longitud [9].

3. Oscilador simple amortiguado

Para introducir el problema de resonancia de estructuras, empezaremos por explicar el fenómeno de la manera más simple posible, con un modelo compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador [10]. En la Figura 3 puede observarse un esquema de este modelo.

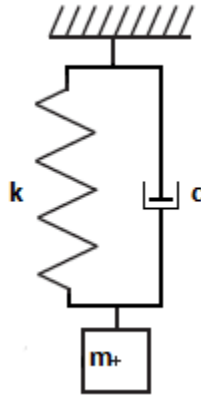


Figura 3: Sistema masa – resorte - amortiguador.

A la masa representada en el sistema, le aplicaremos una fuerza F . A parte de ella, encontramos tres fuerzas más en el sistema: la de la gravedad, y la reacción del resorte y del amortiguador. El interés de esta configuración reside en el papel de cada uno de estos elementos en la ecuación diferencial que describe la dinámica del problema, como vemos a continuación (el problema está planteado sobre el eje vertical):

- Amortiguación c : Su contribución se resume en una fuerza proporcional a la velocidad y en sentido contrario, de manera que $F_1 = -c\dot{u}$.
- Resorte k : En este caso, la fuerza resultante de la acción del resorte es proporcional al desplazamiento y de sentido contrario: $F_2 = -ku$.
- Fuerza F : Como se trata de una fuerza que introducimos nosotros mismos, definiremos F como una fuerza sinusoidal, de manera que $F = F_0 \cos(\omega t)$. Esta elección será explicada más adelante, pero se basa en el hecho que el problema de resonancia surge de la aplicación de este tipo de fuerzas sobre las estructuras.
- Masa m : Su contribución en la ecuación será doble; por un lado, como fuerza de la gravedad, y por otro, como término de masa por aceleración ($m\ddot{u}$). No obstante, el término de gravedad puede eliminarse con el cambio de variable $\bar{u} = u + \Delta l$, donde $\Delta l = \frac{mg}{k}$ es el desplazamiento de m resultado del equilibrio entre la fuerza del resorte y la gravedad antes de aplicar la fuerza. Sin embargo, para no complicar la notación, seguiremos utilizando u .

Dicho esto, el equilibrio de fuerzas resulta en la siguiente ecuación diferencial:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \sin(\omega t)$$

Cuya solución es la suma de una solución homogénea y una particular. Si definimos

$\varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$, obtenemos como soluciones:

$$u_p = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$$

$$u_h = e^{-\varepsilon \omega_p t} \left(A \sin(\omega_p \sqrt{1 - \varepsilon^2} t) + B \cos(\omega_p \sqrt{1 - \varepsilon^2} t) \right)$$

Mientras que la solución homogénea es transitoria, ya que decrece con el tiempo, la solución particular es permanente, y es la que rige el problema a partir de un t suficientemente grande. También podemos definir u_p como:

$$u_p = E \sin(\omega t - \varphi)$$

Donde:

$$- E = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2 \omega^2}{\omega_p^2}}}$$

$$- \tan \varphi = \frac{2\varepsilon \frac{\omega}{\omega_p}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

El interés de este análisis reside en el factor de amplitud E , que es función de la frecuencia de la fuerza F . Para diferentes valores de c , podemos trazar $\frac{Ek}{F_0}$ en función de $\frac{\omega}{\omega_p}$ como vemos en la Figura 4:

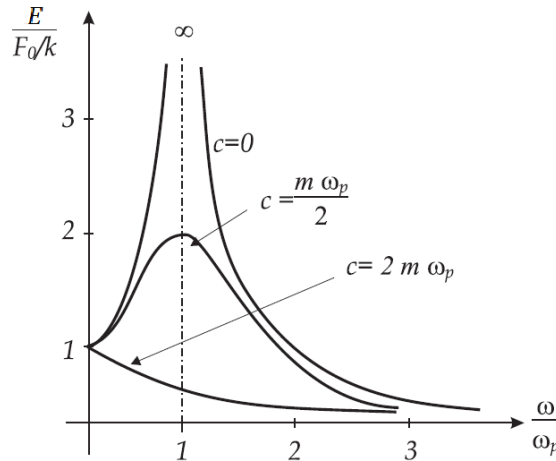


Figura 4 [10]: Gráfico $\frac{\omega}{\omega_p}$ (abscisas) - $\frac{Ek}{F_0}$ (ordenadas) para diferentes valores de c .

Vemos, pues, que para el valor $\omega = \omega_p$ existe un máximo de amplitud que tiende a infinito para valores de c cercanos al cero. Este valor es, además, característico del sistema, pues $\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4. RESONANCIA EN MEDIOS CONTINUOS

Como comentamos anteriormente, el ejemplo del sistema masa – resorte – amortiguador nos sirve para presentar qué es la resonancia y cuáles son sus efectos, pero para comprender realmente este fenómeno es necesario formular el problema en teoría de medios continuos. Esto nos permitirá encontrar las particularidades reales frente a la primera simplificación que hemos presentado, y definir los parámetros que intervienen en el problema.

Para ello, en vez de pasar directamente a la formulación en medios continuos, introduciremos primero un sistema de 2 masas conectadas entre sí a través de resortes y observaremos, seguidamente, qué generalizaciones podremos hacer para el caso de n grados de libertad. Esto nos permitirá comprender más fácilmente algunos de los resultados que obtendremos posteriormente.

4.1 SISTEMA A DOS GRADOS DE LIBERTAD

Como ya hemos dicho, en un primer momento abordaremos un problema similar al que planteamos en el apartado anterior, excepto que a partir de ahora no introduciremos un amortiguador, puesto que ya observamos en ese caso que la frecuencia de resonancia de ese sistema no dependía del parámetro de amortiguación.

El sistema que estudiaremos es el representado en la Figura 5 [4]. Es similar al primer problema planteado, excepto que en éste caso no encontramos amortiguadores, y hay una segunda masa conectada a por un segundo resorte a la primera. Supondremos que el problema tiene dos grados de libertad, que representan el movimiento horizontal de las masas m_1 y m_2 . El movimiento de la primera masa será u_1 , y el de la segunda u_2 . De la misma manera, k_1 representará el módulo elástico del primer resorte, y k_2 el del segundo.

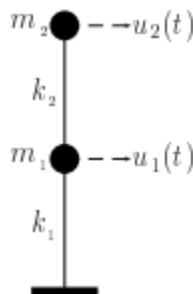


Figura 5 [4]: Sistema de dos grados de libertad.

En este caso, podremos obtener dos ecuaciones diferenciales del análisis dinámico de las dos masas. En la primera, encontramos, en primer lugar, una primera fuerza, consecuencia del efecto del primer resorte, que tiene por expresión $F_1 =$

$-k_1 u_1$. No obstante, el efecto del segundo resorte no depende exclusivamente del desplazamiento de la primera masa, sino que también participa en esa expresión el de la segunda, de la forma $F_2 = -k_2(u_1 - u_2)$. Finalmente, de la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$-k_1 u_1 - k_2(u_1 - u_2) = m_1 \ddot{u}_1$$

Y reagrupando los términos de la expresión:

$$m_1 \ddot{u}_1 + u_1(k_1 + k_2) - k_2 u_2 = 0$$

En el caso de la segunda masa, la expresión es fácil de obtener, puesto que solo participa el segundo resorte, y la fuerza que este ejerza sobre ella debe ser igual y en sentido contrario a F_2 . Por ello, en este caso obtenemos:

$$m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_2 u_1 = 0$$

Habitualmente, estas dos expresiones son agrupadas en una sola [12], compuesta por matrices. Esta sería:

$$M\ddot{U} + KU = 0$$

Donde:

- $M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ (matriz de masa)
- $K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$ (matriz de rigidez)
- $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
- $\ddot{U} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix}$

Para resolver este problema, supondremos una solución del tipo $U(t) = Ae^{i\omega t}$, donde A es un vector formado por dos constantes por determinar, ω es otra constante por determinar e $i = \sqrt{-1}$. De esta manera, la ecuación a resolver pasa a ser $(-\omega^2 M + K)Ae^{i\omega t} = 0$, y como $e^{i\omega t}$ es siempre diferente de cero, obtenemos la expresión:

$$(-\omega^2 M + K)A = 0$$

Si excluimos la solución trivial $A = 0$, la condición necesaria para que el otro término no sea inversible, lo que equivale a decir que su determinante sea igual a cero. Desarrollando el término $(-\omega^2 M + K)$, esto se traduce en:

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_2 k_1 + m_2 k_2 + m_1 k_2) + k_1 k_2 = 0$$

Que es una ecuación de segundo grado donde ω^2 es la incógnita, y para la cual podemos encontrar dos soluciones, ω_1^2 y ω_2^2 . Suponiendo que $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2 = k$, obtendríamos:

$$\omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$$

Para cada uno de los casos podemos obtener un vector A , si resolvemos las siguientes ecuaciones:

$$(-\omega_1^2 M + K)A_1 = 0$$

$$(-\omega_2^2 M + K)A_2 = 0$$

Si llamamos $A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} A_2^1 \\ A_2^2 \end{pmatrix}$, obtenemos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} A_1^1 \end{pmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{pmatrix} A_2^1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} A_2^1 \end{pmatrix}$$

¿Qué representan estos resultados? En primer lugar, tenemos ω_1 y ω_2 , que como vemos en la expresión de $U(t)$, son frecuencias. A , en cambio, es la amplitud del movimiento para cada una de las masas, dada una frecuencia ω . No obstante, no conocemos su norma, sino simplemente una relación entre sus componentes.

Además de todo esto, si examinamos otra vez la ecuación diferencial con la que hemos estado trabajando, vemos que se trata de una ecuación lineal, por lo que cualquier combinación lineal de las dos soluciones que hemos encontrado es también solución. Tras hacer esto, obtenemos finalmente la ecuación [12]:

$$U(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) A_1 + C_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) A_2$$

Donde las constantes C_1 , C_2 , φ_1 , y φ_2 deben ser determinadas a partir de las condiciones iniciales de U_0 y V_0 .

Vemos, pues, que cada masa oscila con dos frecuencias, ω_1 y ω_2 . Estas son las frecuencias naturales del sistema, y a cada una de ellas les corresponde un modo natural de oscilación representado por A_1 y A_2 respectivamente, cuya combinación lineal nos dará las posibles respuestas del sistema.

4.2 SISTEMA A N GRADOS DE LIBERTAD

Este análisis para dos masas puede generalizarse para n masas. Si observamos cómo hemos construido las matrices M y K para $n=2$, podemos generalizar el método y obtener dos matrices de la siguiente forma (Figura 6):

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & \vdots \\ & m_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & m_{n-1} & 0 \\ & & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \vdots \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

Figura 6 [12]: Matrices de masa y de rigidez para n grados de libertad.

De esta manera, la ecuación $M\ddot{U} + KU = 0$ sigue siendo válida, excepto que en este caso, tanto M como K son matrices de tamaño $n \times n$, y el vector U y su segunda derivada tienen n componentes, uno para cada masa del sistema. Multiplicando por la izquierda por M^{-1} , y suponiendo como en el caso anterior que la respuesta es de la forma $U(t) = Ae^{i\omega t}$ (siendo A , en este caso, un vector de n componentes), obtenemos la expresión:

$$(M^{-1}K - \omega^2 I)A = 0$$

Que representa un problema de valores propios de la forma $BA = \lambda A$, con $B = M^{-1}K$ y $\lambda = \omega^2 I$, siendo λ el valor propio del vector A . Esto implica que las frecuencias naturales y los modos naturales pueden obtenerse a partir de los valores propios y de los vectores propios de la matriz $M^{-1}K$, aunque, como ya dijimos anteriormente, esto no proporciona la norma de los modos, sino que solamente lo que sería su forma. Si representamos gráficamente estos vectores como el movimiento horizontal de las masas, obtendríamos unos resultados similares a los de la Figura 7, que, como vemos, tienen un carácter sinusoidal que se acentúa al tomar modos de mayor frecuencia.

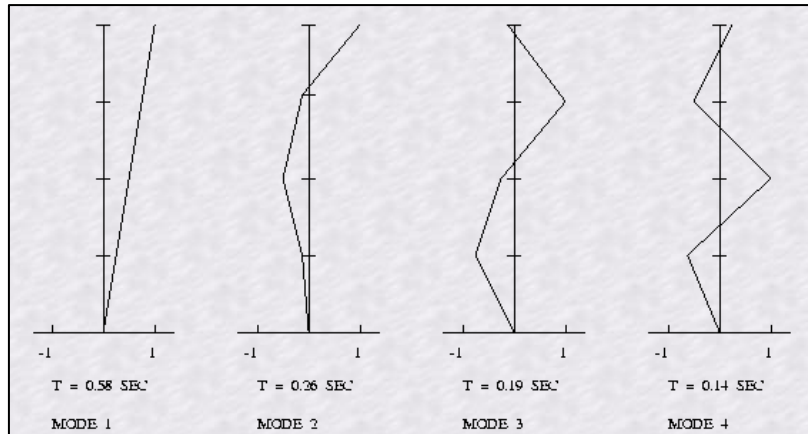


Figura 7 [6]: Modos naturales de un sistema de $n=4$ grados de libertad.

Una propiedad que nos interesa de los n modos de vibración obtenidos es que son ortogonales entre ellos [12]. Si para todo modo i tenemos $(-\omega_i^2 M + K)A_i = 0$, para dos modos diferentes r y s :

$$KA_r = \omega_r^2 MA_r$$

$$KA_s = \omega_s^2 MA_s$$

Si multiplicamos cada expresión por el vector propio del otro modo transpuesto, obtenemos:

$$A_s^T K A_r = \omega_r^2 A_s^T M A_r$$

$$A_r^T K A_s = \omega_s^2 A_r^T M A_s$$

Y si transponemos la segunda expresión, restándola a la primera obtenemos

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) A_s^T M A_r = 0$$

De donde vemos que si $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$, $A_s^T M A_r = 0$.

Como en el caso de $n=2$, a causa de que la ecuación diferencial es lineal, la solución general se obtiene de la superposición de las soluciones individuales i .

4.3 FRECUENCIAS Y MODOS DE RESONANCIA DE UNA VIGA

Para el siguiente caso, hay que tener en cuenta que el análisis de resonancia en medios continuos puede ser muy complejo, y hay generalizaciones que a nivel conceptual aportan más complejidad que claridad. Por ello, y porque el sujeto a tratar es, en el fondo, la ingeniería civil, nos interesaremos en los casos más simples que nos conciernen, las vigas, y veremos qué conclusiones obtendremos como resultado.

Para el análisis de las frecuencias propias y los modos de resonancia de estas estructuras, nos basaremos en el modelo de la viga de Euler – Bernoulli, y supondremos que la flexión será la responsable de las deformaciones. Nuestro objetivo no es desarrollar toda una teoría de vigas, así que empezaremos en análisis por la ecuación de Bernoulli que describe su movimiento [1]:

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

La notación utilizada es la usual en este tipo de casos:

- u es el desplazamiento en el punto x y en el tiempo t .
- ρ es la densidad
- A es la sección de la viga
- I es el momento de inercia de la sección
- E es el módulo de elasticidad

Para resolver esta EDP utilizaremos el método de separación de variables. Suponiendo $u(x, t) = \varphi(x)U(t)$, obtenemos de la expresión anterior:

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} = - \frac{\partial^2 U(t)}{U(t)} = \omega_0^2$$

Esta expresión podemos separarla en las dos expresiones siguientes:

$$\frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} - \frac{\rho A \omega_0^2}{EI} \varphi(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} + \omega_0^2 U(t) = 0$$

Si llamamos $\alpha^4 = \frac{\rho A \omega_0^2}{EI}$, obtenemos como resultado de las ecuaciones diferenciales anteriores:

$$U(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\varphi(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + C_3 \sinh(\alpha x) + C_4 \cosh(\alpha x)$$

Las constantes de ambas ecuaciones dependerán de las condiciones de contorno: A y B dependen del desplazamiento inicial y de la velocidad inicial; y C_1 , C_2 , C_3 y C_4 dependen de las condiciones en los extremos de la viga. En este caso, supondremos una viga doblemente encastrada, para así obtener unos resultados concretos. Para esta hipótesis, aplicamos las condiciones de contorno

$$x = 0 \rightarrow u(0, t) = 0, \frac{du}{dx}(0, t) = 0$$

$$x = L \rightarrow u(L, t) = 0, \frac{du}{dx}(L, t) = 0$$

Aplicando esto a la función $\varphi(x)$, obtenemos, por un lado, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, pero esto supondría que $\varphi(x) = 0$. La otra posibilidad es una condición sobre αL , que viene definida por la expresión $1 - \cos(\alpha L) \cosh(\alpha L) = 0$. Existen infinitas soluciones para esta ecuación, que podemos obtener de manera aproximada numéricamente. Los primeros resultados obtenidos son los siguientes:

$$\alpha_1 = 4.730040745$$

$$\alpha_2 = 7.853204624$$

$$\alpha_3 = 10.99560784$$

...

La solución puede aproximarse con la expresión siguiente para valores de n :

$$\alpha_n L \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

Este resultado nos permite calcular las frecuencias naturales de una viga doblemente empotrada, gracias a la expresión que hemos presentado anteriormente $\alpha^4 = \frac{\rho A \omega_0^2}{EI}$. De esta manera obtenemos

$$f_n = \sqrt{\frac{\rho A}{EI} \left(\frac{(2n + 1)\pi}{2L} \right)^2}$$

Y para cada uno de esos f_n , obtenemos una función de forma φ_n que tiene como expresión:

$$\varphi_n(x) = C_1 \left(\sin(\alpha_n x) - \sinh(\alpha_n x) + \frac{\cos(\alpha_n L) - \cosh(\alpha_n L)}{\sin(\alpha_n L) + \sinh(\alpha_n L)} (\cos(\alpha_n x) - \cosh(\alpha_n x)) \right)$$

Del mismo modo, para cada ω_n obtenemos un $U_n(t)$. Esto quiere decir que la solución de la ecuación diferencial presentada inicialmente es $u_n(x, t) = \varphi_n(x)U_n(t)$, pero si esto es cierto para todo n , podemos considerar la combinación de todas las soluciones como [13]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)U_n(t)$$

Lo cual es un resultado similar al presentado anteriormente, para un sistema compuesto de diversas masas y resortes. No obstante, teniendo en cuenta que hemos introducido una serie, cabe destacar, sin entrar demasiado en detalles, que debe garantizarse su convergencia en todo punto y que esta verifique la ecuación diferencial de problema también en cada punto.

De este análisis podemos obtener diversas conclusiones: En primer lugar, los resultados que encontramos son limitados a causa de la misma primera hipótesis en la que nos basamos, que supone que la deformación es fruto de la flexión. En el documento en el que nos basamos para este análisis [1] también se presentan los resultados del estudio de una viga sometida a deformación por esfuerzo cortante principalmente. Sin entrar demasiado en detalles, las frecuencias obtenidas vienen dadas por la expresión $f_n = \frac{n-0.5}{2L} \sqrt{\frac{GS}{m}}$, donde m es la densidad lineal, G el módulo de elasticidad transversal y S la sección. Hay que tener en cuenta, además, que los resultados obtenidos dan información exclusivamente de la flecha vertical de la viga, pero esto no quita que sigan existiendo más modos de vibración, tanto en otras direcciones, como de torsión. Por otro lado, vemos que, como en el caso de un sistema compuesto por varias masas y resortes, existen diversas frecuencias de resonancia, que excitan diferentes modos de vibración de la estructura. El análisis en medios continuos podría interpretarse como la generalización de los sistemas masas-resortes, suponiendo un número infinito de grados de libertad. Finalmente, pese a todas las aproximaciones que hemos hecho, los resultados siguen aportándonos información válida a considerar. Especialmente, la expresión $f_n = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \left(\frac{(2n+1)}{2L} \right)^2$ nos aporta datos interesantes sobre los parámetros a considerar cuando tratemos de estudiar los modos de vibración de estructuras que tengan una dimensión mucho mayor que las otras dos.

5. ANÁLISIS NUMÉRICO DE FRECUENCIAS Y MODOS NATURALES DE UNA VIGA

Para comprender mejor los resultados obtenidos anteriormente, expondremos dos ejemplos numéricos de cálculo de frecuencias y de modos naturales de una viga. El primero de los ejemplos [2] realiza el estudio interesándose solamente en la flecha vertical de la viga, mientras que el segundo [5] utiliza un modelo 3D.

En el primero de los casos, la resolución se basa en un análisis similar al realizado anteriormente, excepto que en este caso las condiciones de contorno son las de una viga empotrada exclusivamente por una de sus extremidades. La expresión analítica de sus frecuencias viene definida por [1]:

$$f_1 = \frac{0.5596}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\frac{f_n}{f_1} = 0.7 \times (2n - 1)^2$$

En este caso, estudiamos una viga de 600 mm de longitud, con un grosor de 50 mm y una altura de 5 mm. Está compuesta de acero, con una densidad de densidad 7850 kg/m³, un módulo de Young de 210E+09 Pa, y un coeficiente de Poisson de 0.303.

El análisis utiliza ANSYS para obtener los resultados. La manera de proceder usual es generando la geometría y atribuyéndole un material que tenga las características que nos interesan (en este caso, las comentadas anteriormente). Seguidamente, se crea un *mesh* sobre el cual se realiza el cálculo, considerando la formulación variacional del problema en cuestión.

El interés principal de este caso donde la viga es modelizada es una dimensión, además de ver que los datos analíticos y numéricos coinciden, es observar los modos de vibración comunes, que toman forma sinusoidal (Figura 8). A medida que nos interesamos a frecuencias naturales más elevadas, vemos que la forma de los modos va teniendo más y más nodos, de manera similar al ejemplo de n grados de libertad presentado anteriormente en el apartado 1.3.

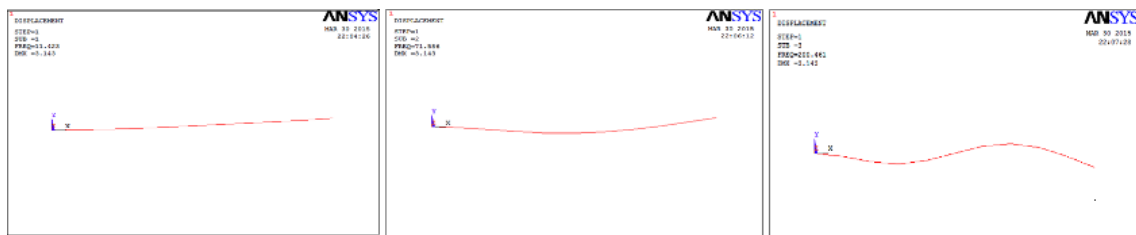


Figura 8 [2]: Tres primeros modos de vibración de la viga estudiada.

No obstante, estos modos son solo propios de una representación en una dimensión, basada en la flecha de la viga. Como comentamos anteriormente, los modos naturales pueden tomar otras formas, en función de su dirección de oscilación. Esto queda representado en el segundo caso, en el cual se trata una viga en tres dimensiones. La viga en cuestión es la de la Figura 9: Se trata de una viga de sección en I, con una longitud de 500 mm, y una sección de 5 mm de grosor, con un grosor de 40 mm y una altura de 80 mm. Está compuesta por una aleación de titanio, cuya densidad es de 4480 kg/m^3 , y cuyo módulo de Young es de $1.103\text{E}+11$. Las condiciones de contorno son las mismas que en el caso anterior, y el análisis también se realiza en ANSYS. Aunque la geometría sea más compleja, la metodología a aplicar es la misma que en el caso anterior, empezando por la geometría y siguiendo por las características del material y por las condiciones de contorno a aplicar en los extremos de la viga.

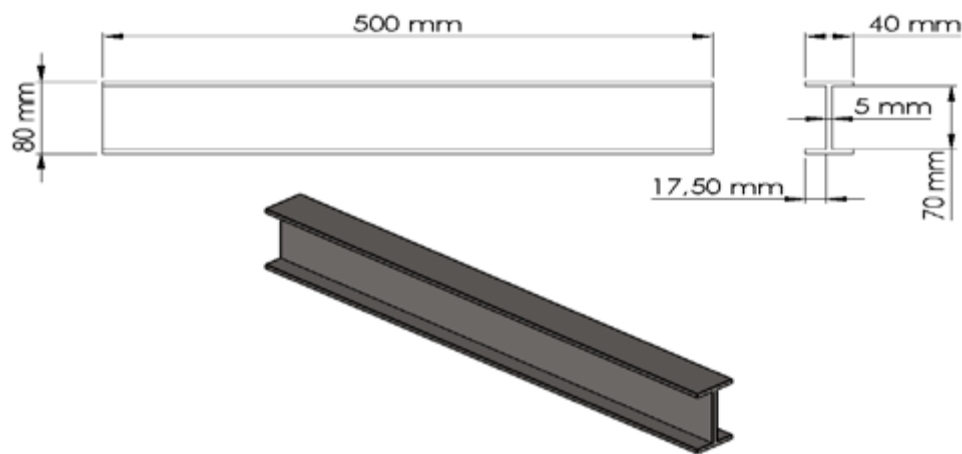


Figura 9 [5]: Geometría de la segunda viga estudiada.

Podemos utilizar la primera de las fórmulas presentadas anteriormente para predecir los resultados que obtendríamos. Suponiendo no solamente la flecha vertical, sino también el desplazamiento horizontal (considerando las dos inercias de la sección), obtenemos como frecuencias, por un lado $f = 94 \text{ Hz}$ (desplazamiento horizontal), y por otro $f = 340$ (flecha vertical). Suponiendo que el análisis es independiente en las dos direcciones, si aplicamos la segunda fórmula para $n=2$, obtendríamos que la segunda frecuencia del desplazamiento horizontal es de 592 Hz , y la de la flecha vertical, 2142 Hz .

A continuación presentamos los resultados del análisis en ANSYS: Las frecuencias obtenidas para los diferentes modos son las de la Tabla 1, y sus modos correspondientes son los de la Figura 10

Modo	1	2	3	4	5
Frecuencia	94.02 Hz	207.65 Hz	324.32 Hz	570.48 Hz	824.08 Hz

Tabla 1

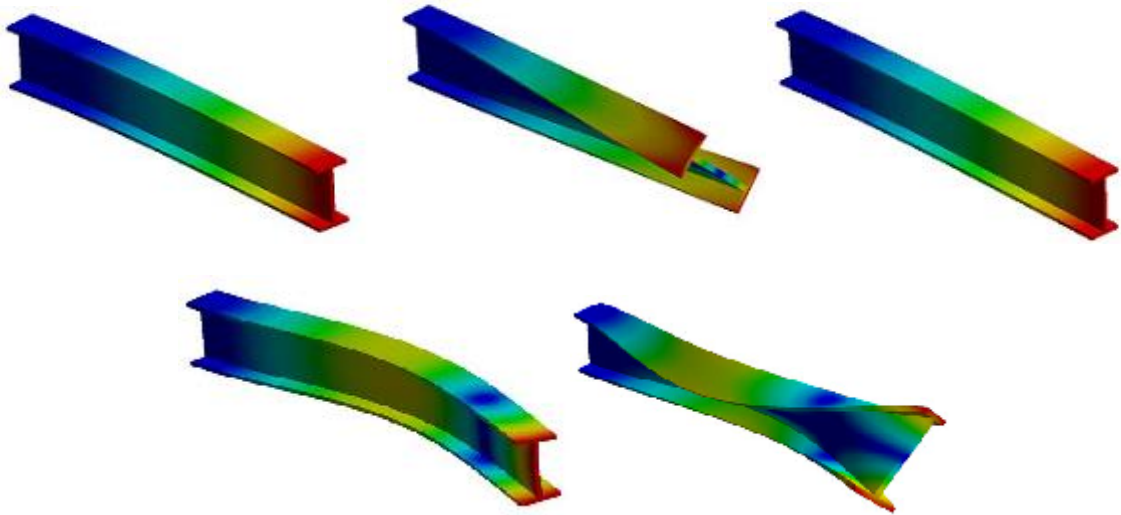


Figura 10 [5]: Primeros modos de vibración de la segunda viga estudiada.

En primer lugar, vemos que los resultados que obtuvimos analíticamente los encontramos con un cierto porcentaje de error en los resultados numéricos: Por un lado, los modos de desplazamiento horizontal 1 y 4, y por otro lado, el modo de desplazamiento vertical 3. No obstante, vemos que estos no son los únicos resultados del análisis de la viga; el modo 2 y el modo 5 son ejemplos claros de los modos de torsión a los que hicimos alusión anteriormente pero que no pudimos calcular con el modelo a una dimensión de la viga.

Pese a no ser parte de los resultados obtenidos en el análisis anterior, queremos resaltar su importancia, puesto que, haciendo referencia al apartado 1.1, este tipo de modos fueron los principales contribuyentes en la excitación del puente de Tacoma, como mostraban las imágenes. De hecho, en este caso, su frecuencia es inferior a la de la flecha vertical.

6. APLICACIONES

Llegados a este punto, haremos un paréntesis para comentar los resultados obtenidos hasta ahora. Empezando por un simple sistema de una masa, un resorte y un amortiguador, hemos visto qué es su frecuencia de resonancia, los peligros de excitar el sistema a esa frecuencia, y como ella es una característica intrínseca de la estructura, puesto que en ese caso solamente dependía de k y m ($\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Cabe destacar, también, que esta no depende del amortiguamiento que impusimos, puesto que este solamente reduce la amplitud de la oscilación, pero no hace variar la frecuencia de resonancia.

Hecho esto, pasamos a introducir un sistema con más grados de libertad. El concepto en cuestión no cambió, pero en este caso, observamos que encontramos tantas frecuencias como grados de libertad planteábamos en el problema. A cada una de ellas le correspondía un modo de vibración, según la resolución de un problema de valores y vectores propios, que era ortogonal al resto. La solución del problema era una combinación lineal de las respuestas individuales, cuya importancia en la respuesta final venía definida por un coeficiente de participación.

La misma lógica se aplica al análisis de una viga que trabaja a flexión: Su comportamiento es similar al de un sistema con n grados de libertad, pero en este caso encontramos infinitas frecuencias naturales y, por lo tanto, infinitos modos naturales de vibración. Igual que antes, cada uno de esos modos se combina según un factor de participación para determinar la respuesta general de la estructura.

Dado que la respuesta de una estructura puede expresarse como una combinación lineal de sus modos de vibración, aparece el llamado análisis modal, que tiene como objetivo determinar tanto estos como sus frecuencias de vibración, ya sea a nivel teórico o a nivel experimental, para explotar estos resultados. El análisis teórico, por un lado, se basa en las explicaciones que hemos realizado anteriormente, aunque con una mayor complejidad y menos generalizaciones. El desarrollo de métodos numéricos, como es el caso de la teoría de elementos finitos, permite obtener buenos resultados incluso tratando con geometrías complejas. Por otro lado, la teoría del estudio a nivel experimental se basa en la obtención de la respuesta de un punto a la excitación de la estructura en otro punto, en función de la frecuencia de esta excitación. La obtención de varias de estas funciones permite representar adecuadamente las características el sistema.

Estos resultados pueden explotarse de diversas maneras. Una de ellas, sería el análisis espectral [7], utilizado comúnmente en análisis de estructuras para determinar la respuesta de una estructura a las acciones sísmicas inducidas por un terremoto. Este combina el análisis modal de la estructura con un espectro de respuesta de la zona, que se basa en la máxima amplitud de respuesta de un oscilador armónico simple que tiene una determinada frecuencia natural. El

resultado final proviene de la combinación de las respuestas modales según diferentes métodos (SRSS, CQC...).

La importancia del análisis modal, y por ende de las frecuencias y los modos de vibración, yace tanto en sus implicaciones directas como en sus aplicaciones en otros análisis dinámicos. El análisis espectral es solo uno de ellos, ya que también puede servir para detectar el deterioro de estructuras a causa del cambio en sus parámetros de amortiguación y rigidez, o para reducir y simplificar modelos matemáticos. Esto, además, son ejemplos propios de la ingeniería civil, pero el análisis vibratorio es también esencial en la concepción de máquinas, como pueden ser las turbinas, para asegurar su correcto funcionamiento.

7. EFECTO DE UN CONTROLADOR TMD SOBRE LA RESONANCIA DE UNA VIGA

Hasta este punto, hemos hablado del fenómeno de la resonancia: qué es, cuáles son sus efectos, y el peligro que representan en la ingeniería civil, pero solamente hemos planteado el problema, y no su solución. Ya en el primer apartado de este documento, introducimos un par de conceptos relacionados con el control de las vibraciones en estructuras (los sistemas de control, ya sean pasivos, activos o semi-activos, y el TMD), pero la explicación quedó reducida al plano teórico y no se profundizó lo necesario, pues aún no se había explicado la resonancia con claridad.

Una vez visto el análisis de frecuencias naturales de una viga simple, presentamos en el siguiente apartado un estudio de los efectos de un sistema de control pasivo TMD, para entender con la claridad necesaria su funcionamiento, sus efectos y sus limitaciones, pero también los métodos experimentales de estudio de este tipo de controladores.

El siguiente apartado se apoya principalmente en el trabajo de Olkan Culvacı [8] sobre el efecto de la variación de los parámetros que definen un control pasivo TMD en el extremo libre de una viga empotrada. El trabajo que realizó puede dividirse en dos partes: una numérica, y otra experimental. Ambos resultados nos interesan, pero el desarrollo matemático del problema es bastante complicado, ya que utiliza ecuaciones no lineales para describir el problema en grandes deformaciones. Los resultados numéricos obtenidos, no obstante, son intuitivos e inteligibles, por lo que nos centraremos exclusivamente en ellos, e invitamos al lector interesado a leer el documento original en el que se comenta cómo se ha planteado analíticamente el problema.

7.1 CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA:

El sistema en cuestión está compuesto básicamente por dos elementos interconectados. El primero es la viga, la estructura principal, que destaca por tener en su extremo libre una masa incrustada. Esta masa no debe ser confundida con la masa del péndulo, el cual es el segundo elemento del que hablábamos. Este está conectado directamente a la masa del extremo de la viga como mostramos en la siguiente figura (Figura 11)

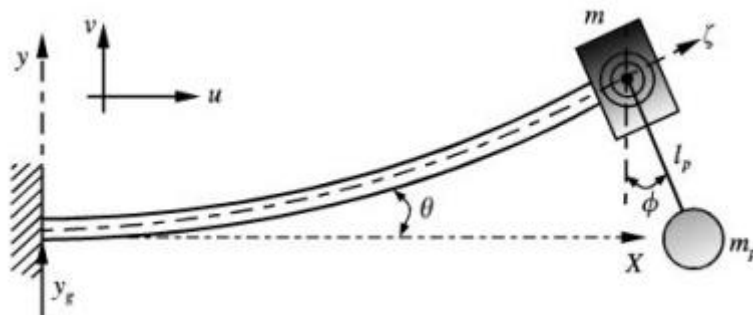


Figura 11 [8]: Sistema de la viga encastrada.

En la figura también puede observarse que todo el sistema se supone empotrado a una pared por la extremidad opuesta a la del péndulo. Este modelo es tanto la base del análisis matemático que se realizó para obtener la respuesta del sistema, como la de la disposición del ensayo que se preparó para obtener los resultados experimentales.

Por lo que concierne a este último análisis, en la siguiente imagen (Figura 12) podemos observar los elementos utilizados en el ensayo:

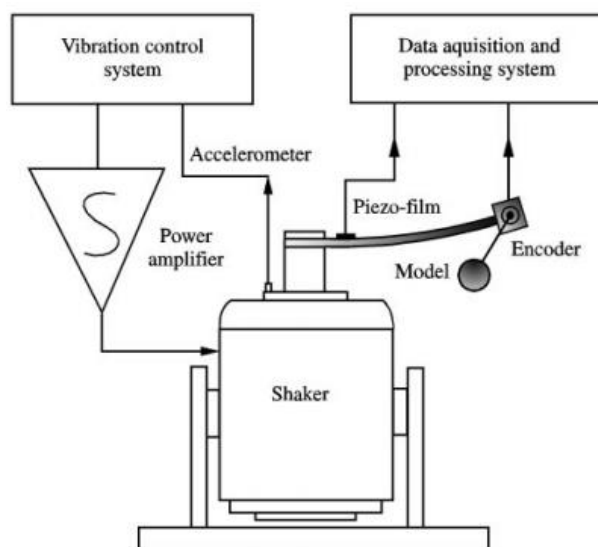


Figura 12 [8]: Disposición de los diferentes elementos del ensayo.

El sistema se compone, en primer lugar, de la viga que hemos descrito anteriormente, solo que esta vez, en vez de estar empotrada, está conectada a una máquina que le impone una vibración (*Shaker*). Esta vibración será determinada por un sistema de control exterior (*Vibration control system*) que recibirá información del estado de vibración del sistema (*Accelerometer*) y que enviará en consecuencia una señal sinusoidal que será amplificada (*Power amplifier*). Los datos de interés serán obtenidos de sensores en la estructura principal y serán procesados por un sistema exterior (*Data acquisition and processing system*).

En la siguiente tabla (Tabla 2) incluimos los valores utilizados para la longitud, el grosor y la altura de la viga, así como la masa del extremo de la viga, la densidad lineal de la viga y la inercia de su sección.

Longitud	0.3360 m
Altura	0.0016 m
Grosor	0.0254 m
Densidad lineal	0.3168 kg/m
Inercia	8.6699E-12 m ⁴
Masa extremo	0.212 kg

Tabla 2

7.2 RESULTADOS:

Como ya hemos dicho anteriormente, el objetivo, tanto del análisis numérico como del análisis experimental, es observar el efecto de la variación de los parámetros del sistema en su comportamiento, ya sea eficacia de la reducción de la amplitud como rango de frecuencias afectadas por esta reducción. Por ello, los datos serán tratados recurrentemente en forma de cocientes, como el de la masa del péndulo sobre la masa de la extremidad de la viga (m_p/m) o el ratio entre la frecuencia del sistema de control y de la estructura principal (ω_p/ω_b). Otro dato a tener en cuenta de especial importancia es la frecuencia de resonancia de la estructura cuando el péndulo está bloqueado. Esta frecuencia es $\omega_b = 3.07 \text{ Hz}$, y gráficamente veremos que los resultados están centrados a su alrededor.

Los ensayos realizados pueden dividirse en tres grupos diferentes, en función del parámetro que se hace variar en cada caso: En el primero de los ensayos, el parámetro en cuestión es el ratio ω_p/ω_b , que se hace variar alrededor de 0,5. En el segundo caso, se observa el efecto de la variación del ratio de masas m_p/m sobre el rango de frecuencias afectadas por el sistema de control. Finalmente, el parámetro que se hace variar en tercer lugar es la amplitud de movimiento impuesta en la extremidad encastrada, en el caso numérico, o enganchada al *shaker* en el caso experimental. En este caso, también se observa su efecto en el rango de frecuencias a las que afecta el péndulo.

PRIMER CASO

En el primero de los casos comentados, como ya hemos dicho, el parámetro que se hace variar es el ratio ω_p/ω_b . Los valores que toma son 0.475, 0.49, 0.5, 0.51 y 0.525, mientras que los otros parámetros (la amplitud de la excitación impuesta y el ratio entre masas) son constantes en todos estos ensayos.

Los resultados obtenidos son en forma de gráfico, con la respuesta de la viga o del sistema de control en función de la frecuencia de excitación. En este caso presentamos dos figuras (Figura 13 y Figura 14) que representan el resultado numérico más favorable ($\omega_p/\omega_b = 0.5$) y el más desfavorable

($\omega_p/\omega_b = 0.525$), respectivamente. En la primera figura vemos que hay cinco curvas, mientras que en la segunda solo hay 3: la número 1, en *Beam response*, muestra la respuesta de la viga en el caso de ser excitada manteniendo el sistema de control bloqueado. Efectivamente, responde de la manera que esperaríamos, con un máximo sobre la frecuencia de resonancia que hemos dado anteriormente. En el caso de la curva 2 y la curva 3, se le permite al sistema de control actuar: en la primera de las dos (número 2), vemos la respuesta de la viga, y en la otra (número 3), la del péndulo. Las curvas 4 y 5 de la primera figura representan lo mismo que las curvas 2 y 3, excepto que en este caso, en vez de empezar a excitar el sistema con una frecuencia baja e ir subiéndola como es el caso de 2 y 3, se ha empezado a excitar el sistema con una frecuencia alta que se ha ido reduciendo. La diferencia es, pues, el sentido en el que se recorren las curvas.

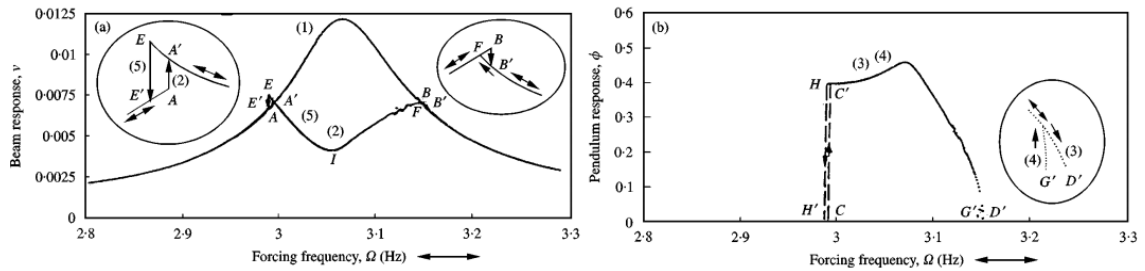


Figura 13 [8]: Resultados para $\omega_p/\omega_b = 0.5$.

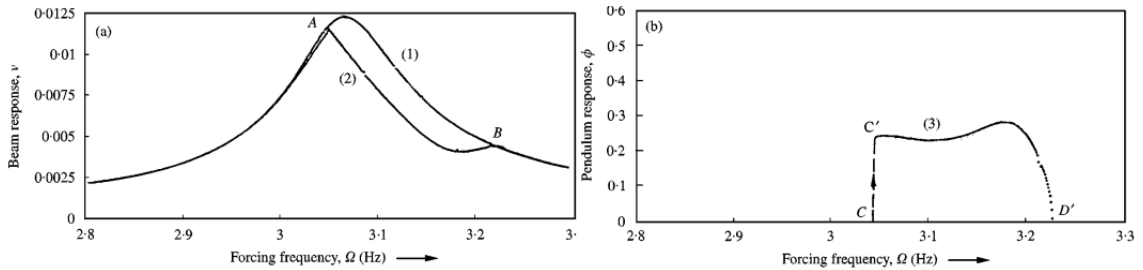


Figura 14 [8]: Resultados para $\omega_p/\omega_b = 0.525$.

Las conclusiones que podemos sacar de estos resultados son las siguientes: en primer lugar, vemos que el ratio de 0.5 ofrece una reducción mucho más acentuada que la del ratio 0.525, la cual es casi ínfima. Los resultados obtenidos con los otros ratios nos muestran una progresión gradual en este sentido, con el ratio 0.51 dando un resultado peor que el de 0.5, pero mejor que el de 0.525. Del mismo modo, los resultados obtenidos con los ratios 0.475 y 0.49 son también peores que el de 0.5 (siendo la reducción resultante del ratio 0.49 mayor a la del ratio 0.475). En segundo lugar, al observar la diferencia entre las formas de la curva 1 y la curva 2 de la primera figura, vemos que la reducción de la respuesta de la amplitud de vibración a causa del efecto del sistema de control genera dos máximos situados de una manera más o menos simétrica respecto a la frecuencia de resonancia, y un mínimo sobre esta misma. Concluimos, pues, que el ratio $\omega_p/\omega_b = 0.5$ maximiza el intercambio de energía entre la estructura principal y el péndulo.

La validez de estos resultados es respaldada por los obtenidos de manera experimental. Siendo algo menos claros gráficamente que los anteriores, pero obteniendo la misma conclusión, hemos decidido no incluirlos en este documento, pero en caso de interés por parte del lector, le animamos a consultarlos en la referencia [8].

De la primera figura también podemos observar, si comparamos el primer grafico (viga) con el segundo (péndulo), la correlación que hay entre la respuesta de ambos sistemas y la transmisión de energía entre ambos, puesto que la excitación del péndulo no empieza hasta que empieza a absorber energía de la viga y a reducir su respuesta. Esto se demuestra también en la siguiente figura (Figura 15), donde se representa la respuesta de la viga y del péndulo a nivel numérico para diferentes valores del ratio w_p/w_b , cuando la estructura es excitada a su frecuencia de resonancia. El mínimo de respuesta de la viga coincide con el máximo de respuesta del péndulo, y ambos se sitúan, como hemos comentado anteriormente, sobre el valor 0.5.

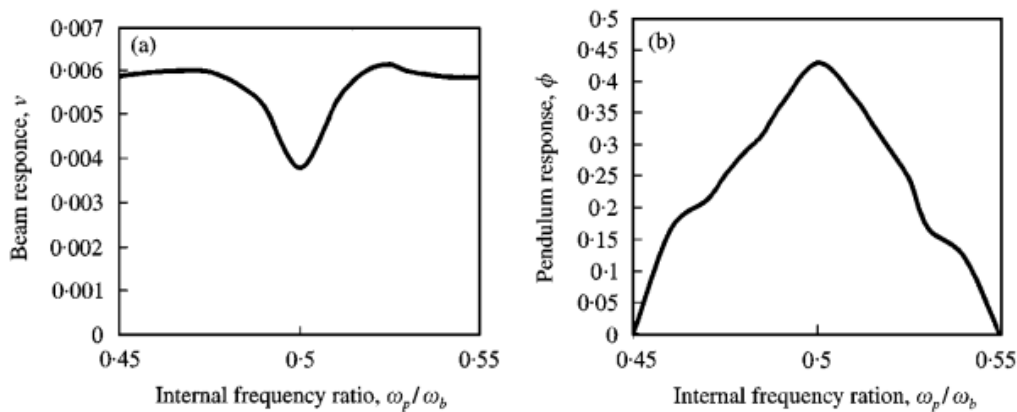


Figura 15 [8]: Respuesta de la viga y del péndulo en función del ratio ω_p/ω_b a su frecuencia natural.

SEGUNDO CASO

Para estos ensayos, el ratio w_p/w_b se mantuvo constante a 0.5, puesto que este era el valor que maximizaba la transmisión de energía de la estructura principal al sistema de control, es decir, su eficacia. Como ya dijimos anteriormente al introducir este apartado, estos resultados muestran el efecto de la variación del ratio m_p/m sobre la llamada zona de absorción o zona de control, que definimos como el rango de frecuencias entre los puntos E y B de la Figura 13, es decir, la zona entre los dos máximos locales generados a causa de la acción del péndulo sobre la respuesta de la estructura.

Los resultados son representados en la siguiente figura (Figura 16) y son fácilmente interpretables : para cada valor del ratio de masas (ordenadas) obtenemos dos valores de frecuencia (abscisas), uno que marca el límite inferior de la zona de absorción (primer máximo local), y otro que marca el límite superior (segundo máximo local). Vemos también que los resultados a

nivel experimental y numérico coinciden por lo que concierne a la forma de los gráficos, pero que la zona de control es más amplia en el caso experimental.

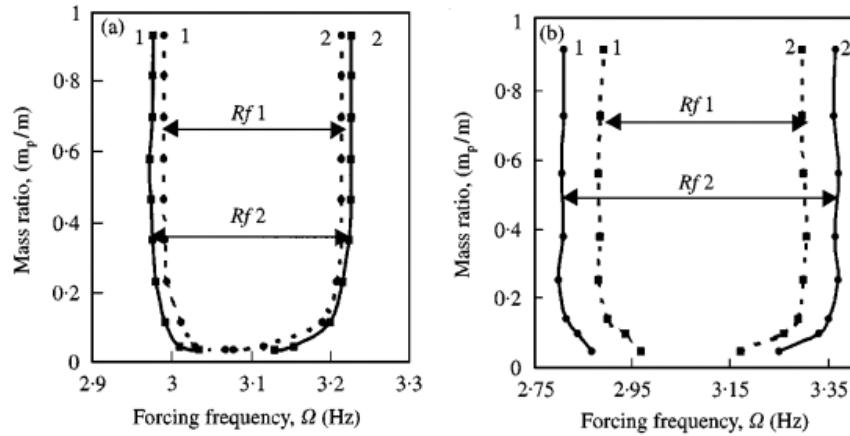


Figura 16 [8]: Zona de absorción según el ratio de masas, para el caso numérico (a) y experimental (b)

Vemos, pues, que ratios superiores a 0.2 no afectan al tamaño de la zona de control, mientras que valores inferiores a 0.05 reducen significativamente el rango de frecuencias afectado.

TERCER CASO

La metodología de los últimos ensayos llevados a cabo es similar a la que acabamos de explicar. Su objetivo es exactamente el mismo: observar el cambio de la zona de absorción del sistema de control. No obstante, en este caso no se hace variar el ratio entre masas, sino la amplitud de la vibración impuesta. El valor del ratio m/m_p que se ha tomado para obtener los resultados de la FIGURA 17 se ha fijado a un valor de 0.125.

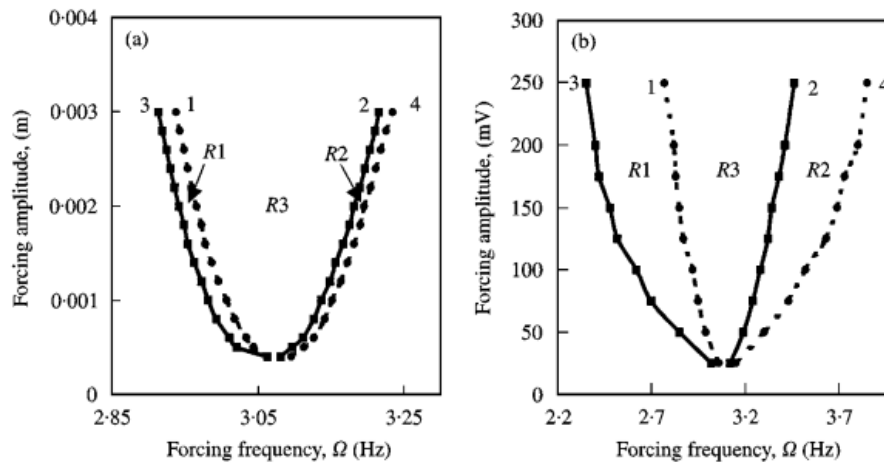


Figura 17 [8]: Zona de absorción según la amplitud de excitación, para el caso numérico (a) y experimental (b)

Los resultados toman una forma de parábola común, ya sea en el caso de los resultados experimentales o en el de los numéricos. Como antes, a cada valor de las ordenadas se le han asociado dos valores de las abscisas, que corresponden al límite inferior y al límite superior del rango de frecuencias

cuya amplitud de vibración ha sido afectada por el efecto del péndulo, siendo la variable representada en ordenadas el valor de la amplitud de vibración impuesta. También observamos, como en el segundo caso, que la zona de absorción es más ancha en el caso experimental que en el caso numérico, y que una amplitud de excitación mayor aumenta el rango de frecuencias de esta zona.

Las conclusiones que podemos sacar son varias: en primer lugar, observamos cuales son los parámetros que determinara la efectividad del sistema de control presentado (péndulo), pero también, y como ya hemos comentado, el efecto de la variación de estos y su grado de importancia en la reducción de la respuesta de la estructura principal. Esto demuestra, numérica y experimentalmente, un comentario que hicimos al inicio de este documento sobre la importancia de calibrar el sistema de control a la estructura principal para que su funcionamiento sea el correcto. En este caso, una simple variación del 5% en los valores del ratio w_p/w_b (de 0.5 a 0.525) acarrea pasar del estado óptimo de absorción a un estado donde la transmisión de energía de la estructura principal al péndulo es prácticamente negligible.

8. PROYECTO MODAL DE MECANICA

En el siguiente apartado presentaremos los resultados de un estudio propio, realizado junto con Youssef Ait-ousarrah. El objetivo de este estudio fue evaluar un puente real construyendo un modelo a escala sobre el cual fueron realizados diversos ensayos: en primer lugar, se calculó sus frecuencias de resonancia, y una vez obtenidas, el puente fue excitado alrededor de estas para ver cómo respondía. Los resultados obtenidos fueron comparados con otros, fruto de un análisis modal con Solid Works. Seguidamente, nos interesamos al posible efecto que podría tener sobre la respuesta del puente a la excitación la incorporación de un mecanismo de control pasivo.

Se trata de un estudio simple, realizado con recursos algo limitados, cuya verdadera razón de ser es esencialmente pedagógica. Por ello, explicaremos la metodología que seguimos y cómo se aplicaron los conceptos definidos anteriormente a lo largo de este documento.

Este proyecto debe contextualizarse como un curso trimestral del segundo año de la *École Polytechnique*, en el cual se les proponían a los alumnos temas que podían escoger. El proyecto en cuestión nos fue propuesto por el tutor del tema de Acústica y Vibraciones, el señor Duhamel, el cual también lo supervisó. El objetivo principal del curso era de ofrecer a los alumnos la posibilidad de llevar a cabo un trabajo más práctico que el habitual en esa universidad, el cual se caracteriza generalmente por una alta carga matemática, independientemente del sujeto.

8.1 METODOLOGÍA

Una vez escogido el tema del proyecto y establecidas sus partes principales, se nos dio bastante libertad para realizarlo. Decidimos que lo más interesante sería basarnos en un puente real, por simple curiosidad, y después de documentarnos un poco sobre los tipos posibles, nos decantamos por uno en arco para no escoger la geometría más simple que encontramos (lo cual nos dio problemas más tarde, a la hora de construir la maqueta). Para resumir, el puente en el que nos basamos es el puente del aeropuerto de Hiroshima (Figura 18).



Figura 18: Puente del aeropuerto de Hiroshima

El puente está compuesto por un tablero de 800 m, dividido en 3 partes: dos más apoyadas en los extremos, y la luz, de 380 m. Su altura total es de 190 m, pero la distancia total entre el punto más alto y el más bajo del arco es de solamente 95 m. Tiene una anchura de 20 m, y los materiales principales utilizados en su construcción son el acero, para la parte del arco, y el hormigón, para su conexión con tierra. En el siguiente cuadro Tabla 3 resumimos estos datos:

Longitud total	800 m
Longitud de la luz	380 m
Anchura del tablero	20 m
Altura del arco	95 m

Figura 3

El primer problema al que nos enfrentamos fue que, evidentemente, no seríamos capaces de modelizar todo el conjunto del puente correctamente, por falta de tiempo, información, y habilidades a nivel de software. Decidimos, pues, centrarnos en la parte central del puente, la luz, para realizar los ensayos. En la siguiente figura (Figura 19) mostramos un esquema de esta zona:

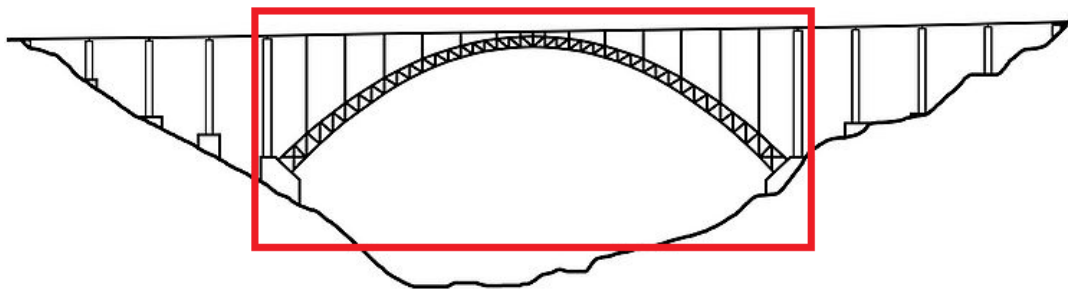


Figura 19: Esquema de la parte central del puente.

Por otro lado, también observamos que no sería posible conservar las frecuencias de resonancia de la estructura real: en primer lugar, por el cambio que hemos comentado en el párrafo anterior, lo cual presupone unas condiciones de contorno libres en ambos extremos del tablero. En segundo lugar, el cambio de escala impone un cambio directo en las características geométricas del puente (longitudes, áreas e inercias), y aunque no sabíamos cómo influían directamente estos cambios en el resultados, observando la ecuación que presentamos en el

apartado 4.3, donde definimos las frecuencias de resonancia en una viga simple, interpretamos que lo harían de manera similar a una barra, a causa de que una de sus dimensiones (su longitud) era muy superior a las otras dos. Fue también en este momento en el que dejamos de lado un objetivo secundario del proyecto: Aunque en un principio hubiésemos querido estudiar cómo trasladar los datos obtenidos al puente real, después de pensar un poco en ello tras estos cambios supusimos que, si no era imposible, sería demasiado complicado realizarlo en el tiempo del que disponíamos, por lo que decidimos dejar de lado la idea.

Una vez llegados a este punto, el proyecto diverge en dos partes diferentes: una numérica y una experimental. Para cada una de estas partes se desarrolló un modelo informático y una maqueta, respectivamente, que serían la base de los ensayos que se realizarían.

Finalmente, como comentamos en la introducción, nuestro objetivo era observar el efecto de un mecanismo de control pasivo en la estructura. Por ello, una vez incorporado, se repitió uno de estos ensayos para observar el cambio en la respuesta.

8.2 DESARROLLO DEL MODELO Y CONSTRUCCION

En primer lugar, la escala que decidimos utilizar para el modelo del puente fue de aproximadamente, 0.002. De manera más simple, la escala que reduce la longitud de la luz del puente de 380 m a 70 cm. Este tamaño fue escogido por las limitaciones de los ensayos experimentales: si el puente fuese más grande, hubiese sido complicado efectuarlos, pero tampoco queríamos realizarlos sobre una maqueta demasiado pequeña.

Por lo que respecta a la forma, la estructura original de acero del puente fue simplificada: como puede apreciarse en la Figura 19, el tablero del puente se apoya sobre el arco mediante quince conexiones rectas, formadas por un sistema de barras circulares de acero entrelazadas. El caso del arco era similar, pero cabe destacar, además, que era más estrecho en el centro que en la base. Desde un primer momento entendimos que no seríamos capaces de modelizar esta geometría, y aunque lo consiguiésemos, nuestro tutor nos advirtió de que los resultados que obtendríamos numéricamente no serían muy precisos. Tras plantear y probar diversas posibilidades, nos decantamos un por una modelización que terminó por responder, en este caso, a las limitaciones de los medios de construcción de los que disponíamos en el laboratorio.

Finalmente, el modelo consistió en un tablero apoyado sobre un arco por 15 barras planas rectangulares del mismo grosor que el tablero. El arco se modelizó mediante dos arcos planos exteriores a las barras, que estaban conectados entre sí mediante barras de sección cuadrada sobre las cuales se apoyaban las conexiones con el tablero. Los cuatro extremos de los dos arcos sirvieron como apoyo de la estructura. Gráficamente, el modelo se resume en la Figura 20.

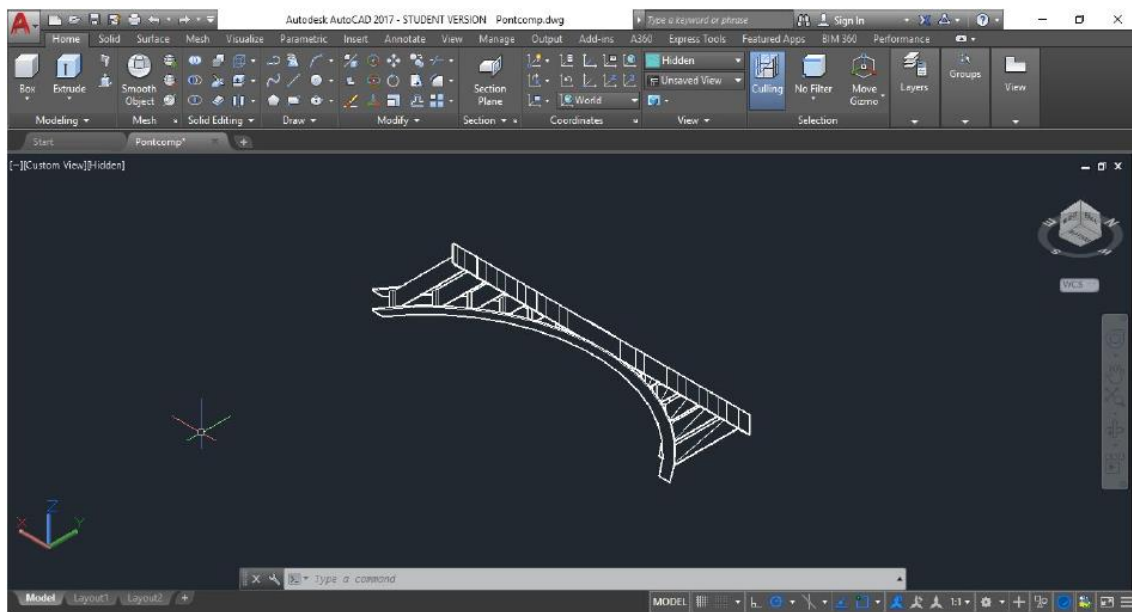


Figura 20: Modelo del puente en AutoCAD.

Como muestra la figura, la modelización 3D se hizo a partir del programa AutoCad. Pese a no ser el programa más indicado para este tipo de modelización, no tuvimos ningún curso suplementario donde pudiésemos aprender a utilizar otro, así que realizamos el modelo con los conocimientos adquiridos en la asignatura de Geometría Descriptiva del grado en la Escuela de Caminos.

Las opciones para la construcción del puente no fueron, en general, las que esperábamos. No habernos informado antes sobre ellas nos retrasó bastante, puesto que debimos cambiar varias cosas de los modelos informáticos previos al definitivo.

Finalmente, la maqueta la realizamos siguiendo el modelo informático presentado anteriormente. El material utilizado fue aluminio, y como solamente dispusimos de dos grosores diferentes para las partes rectangulares, 1 mm y 3 mm, decidimos utilizar el primero para todas las barras (tanto el tablero como las conexiones al arco) y el segundo para los dos arcos planos. Las barras que conectaban estas dos partes del arco tenían una sección cuadrada de 1 cm^2 , y una longitud de 5 cm.

Otro problema con el que tuvimos que lidiar fueron las conexiones entre las diferentes piezas. Decidimos, siguiendo los consejos del equipo del laboratorio, que la mejor opción sería atornillar las piezas entre ellas. De esta manera, las barras entre el tablero y el arco se conectaron al primero mediante un tornillo que pusimos en una lengüeta de la barra que quedaba justo debajo de este, y al segundo atornillándolas en el centro de las barras que unían las dos partes del que formaban el arco. Aunque las uniones eran firmes justo tras atornillarlas, las vibraciones provocadas por los diferentes ensayos las debilitaban, lo que implicaba que si no las reajustábamos, los resultados empezaban a variar. La maqueta terminada puede apreciarse en la Figura 22.

Para terminar, el mecanismo de control TMD lo realizamos mediante un peso de 30 g enganchado a uno de los extremos de la maqueta mediante una barra fina. Para determinar la longitud de la barra y que esta coincidiese con la del puente, nos basamos en la fórmula $\omega = \sqrt{k/m}$. Habiendo definido m , y suponiendo que los 30 g del peso incluido serían muy superiores al de la barra, la longitud la determinamos a través de k , que aproximamos por la fórmula $k = \frac{3EI}{L^3}$.

8.3 ENSAYOS NUMÉRICOS

El objetivo principal del proyecto era calcular las frecuencias de resonancia y los modos de resonancia del puente que realizamos, tanto numérica como experimentalmente. Para el primer caso, utilizamos un modelo informático del puente que, como ya dijimos, realizamos con AutoCad. El análisis, en cambio, fue hecho con SOLIDWORKS, utilizando una licencia de la que disponía el laboratorio.

El cambio de software supuso una pérdida bastante importante de tiempo, sobretodo teniendo en cuenta que SOLIDWORKS incluye una función de diseño 3D. No obstante, como ya dijimos anteriormente, no disponíamos de estos conocimientos ni de tiempo para aprenderlos, por lo que decidimos que la única solución posible sería exportar los modelos 3D del AutoCad en un formato que el SOLIDWORKS fuese capaz de leer (.sat).

Una vez disponible la geometría en SOLIDWORKS, realizamos un análisis modal para obtener tanto sus frecuencias naturales como sus modos. Cabe destacar que el análisis se realizó suponiendo los extremos libres, puesto que este era el casi más simple de simular en los ensayos experimentales.

8.4 ENSAYOS EXPERIMENTALES

Los ensayos experimentales realizados fueron dos: uno para calcular las frecuencias naturales de la maqueta que realizamos, y otro para observar su respuesta a una excitación sinusoidal de tales características.

CALCULO DE LAS FRECUENCIAS NATURALES

Para el cálculo de las frecuencias naturales de la estructura, se utilizó un martillo de impacto y un acelerómetro. El método utilizado se basa en golpear la estructura y en comparar la señal de entrada, que sería el golpe, con la respuesta de la estructura.

Por un lado, el martillo de impacto dispone de un sensor en su cabeza capaz de medir el impacto transmitido al golpear la estructura con él (el *input*, en este caso). Luego, es el acelerómetro el que, enganchado a la estructura, mide su vibración al ser sometida a una excitación (el *output*). Sobre estas dos señales, se realizó un

análisis de Fourier en Matlab para obtener su descomposición en frecuencias, que fueron luego comparadas para saber cuáles eran las frecuencias que forzaban una reacción de mayor amplitud en la estructura. Esto puede observarse en la siguiente figura (Figura 21):

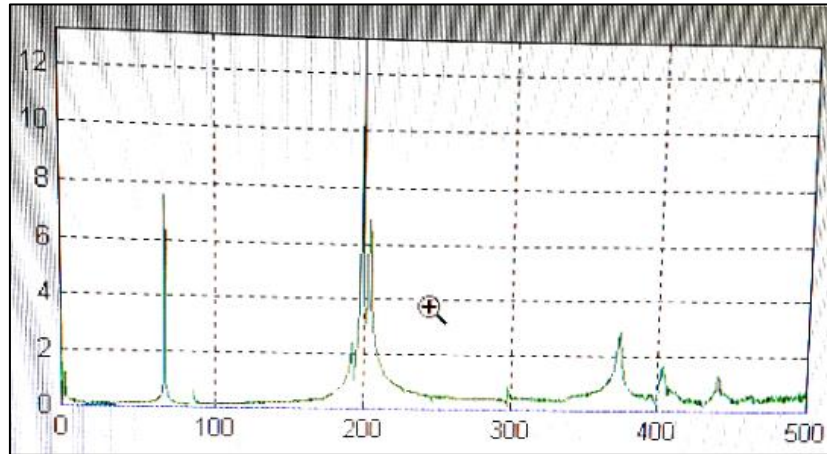


Figura 21: Resultados finales obtenidos.

Para simular las condiciones de extremos libres, utilizamos unas gomas elásticas para suspender el puente desde sus extremos, por recomendación del tutor del proyecto. La disposición de todos los elementos del ensayo puede verse en la Figura 22.

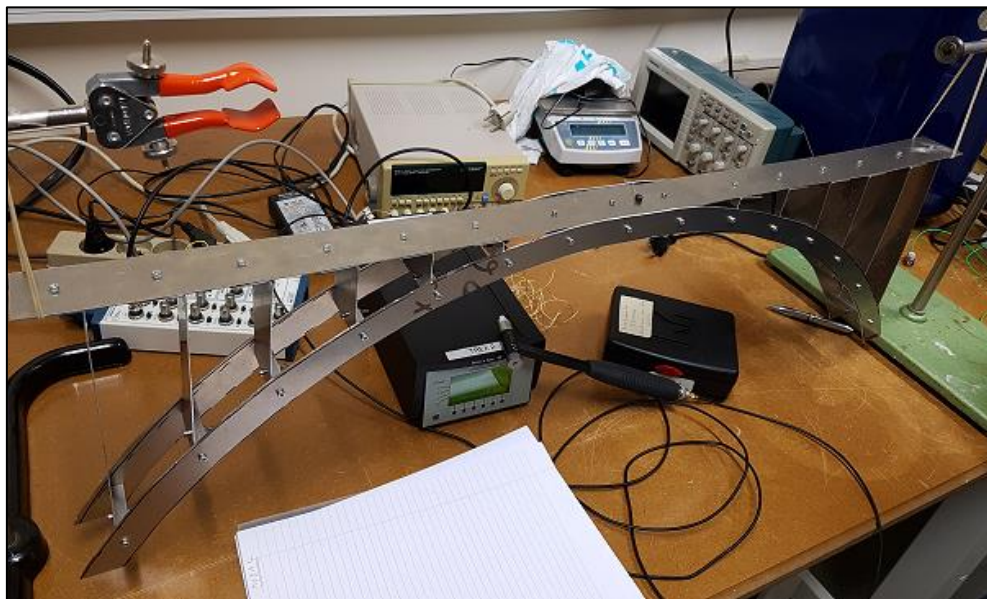


Figura 22: Ensayo del martillo de impacto.

RESPUESTA A UNA EXCITACIÓN FORZADA

En este caso, manteniendo la misma disposición que en el caso anterior para simular los extremos libres de la estructura, se utilizó un excitador conectado al centro del puente, en su parte inferior, para transmitir un movimiento sinusoidal de frecuencia igual a las frecuencias naturales obtenidas experimentalmente. La señal

transmitida provenía de un generador de señales en el cual marcábamos tanto la amplitud como la frecuencia del movimiento. Estos elementos los mostramos en la Figura 23:



Figura 23: Excitador (izquierda) y generador de señales y amplificador (derecha).

8.5 RESULTADOS

Como hemos dicho, los primeros ensayos realizados fueron los que nos permitieron obtener las frecuencias de vibración y sus modos. Los resultados de las dos primeras frecuencias son presentados en la siguiente tabla (Tabla 4), ya sea para el análisis en SOLIDWORKS o para el ensayo con el martillo de impacto:

	Ensayo	SOLIDWORKS
Primera frecuencia	67 Hz	79 Hz
Segunda frecuencia	199 Hz	223 Hz

Tabla 4

Como podemos observar, existe una diferencia de aproximadamente un 10% entre los resultados teóricos y experimentales. Esto puede ser consecuencia de diversos factores: por ejemplo, el modelo informático 3D no incluía los tornillos y, por lo tanto, tampoco su masa. También podemos mencionar el hecho que la simulación de los extremos libres que se realizó en el ensayo mediante gomas elásticas no era realmente exacta, y que eso implicaría una pequeña variación en los resultados. Otro factor a tener en cuenta, como comentamos anteriormente, sería la calidad de las uniones entre las piezas. Teniendo todo esto en cuenta, estuvimos satisfechos con los resultados obtenidos.

En referencia al análisis en SOLIDWORKS, presentamos en la siguiente figura (Figura 24) las formas de los dos primeros modos. Es fácilmente observable que su comportamiento es similar al de una viga en flexión, como vimos en el análisis modal de una viga en tres dimensiones.

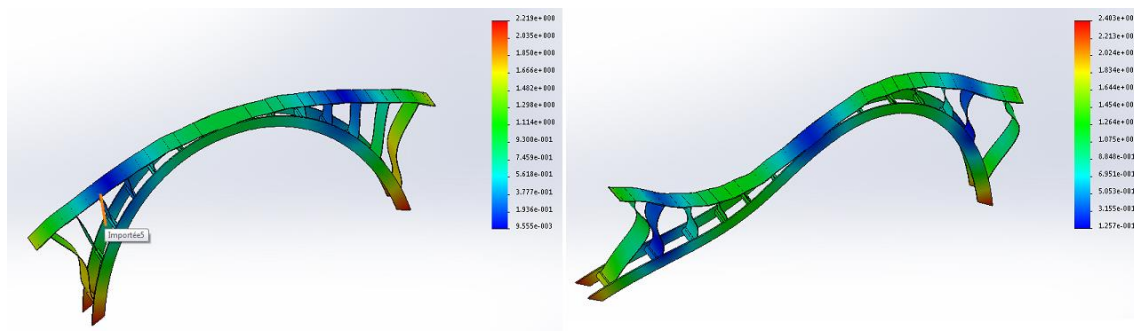


Figura 24: Primeros modos de vibración vertical del puente.

El segundo ensayo, que consistía en hacer vibrar el puente a sus frecuencias naturales, nos confirmó que el resultado del ensayo del martillo de impacto era correcto, con una amplitud de 0.0712 en el punto examinado. Otro hecho a destacar es que, entre los varios modos de vibración que encontramos, hubo dos que nos llamaron la atención, puesto que en ellos solamente la barra exterior de las que conectaban el tablero y el arco se desplazaba (en uno de los modos la barra izquierda, y en el otro la derecha). Lo que en un principio nos pareció un resultado extraño, y que supusimos un error, lo terminamos por confirmar al hacer variar la frecuencia del generador de señal entre la primera y la segunda frecuencia natural que evaluábamos.

Finalmente, repetimos el anterior ensayo una vez incorporado el mecanismo TMD a la estructura. La amplitud que obtuvimos esta vez fue de 0.022, lo cual representa una reducción cercana al 70%. Esto contradecía lo que se decía de manera genérica en la bibliografía, que decía que su efecto era normalmente no superior al 40%. Como tras finalizar este ensayo no disponíamos de otras sesiones en las que repetirlo, concluimos finalmente que los resultados no eran concluyentes. Esto no supuso una sorpresa, puesto que no dispusimos de la suficiente bibliografía sobre el tema como para realizar un ensayo que estuviese bien asentado sobre conocimientos previos (la mayor parte de la bibliografía presentada en este documento sobre el control pasivo mediante mecanismos TMD fue consultada posteriormente, de manera individual, para este TFG).

9. Conclusión

En este documento hemos presentado las bases necesarias para comprender el análisis modal: desde el caso más simple (un oscilador simple de un grado de libertad), hemos observado el efecto de la excitación del sistema por una fuerza armónica, y hemos comprobado el papel de los parámetros que definen el sistema en la respuesta de este mismo. Poco a poco hemos generalizado el ejemplo inicial para así comprender los resultados del estudio de una viga según teoría de medios continuos: de esta manera, hemos visto que su respuesta puede caracterizarse por diferentes modos de vibración, cada uno asociado a una frecuencia característica, y que vienen definidos por las características geométricas y de rigidez del sistema.

Ante el peligro que presenta este comportamiento, a causa de la amplitud de las oscilaciones impuestas, se han descrito teóricamente los sistemas de control y se ha documentado el efecto de un sistema TMD sobre la primera frecuencia de resonancia y sobre la amplitud de su oscilación, destacando especialmente el efecto de la variación de los parámetros del sistema TMD sobre el rango de frecuencias de control y la reducción alcanzada. Esto ha mostrado la importancia de la correcta calibración de los parámetros que definen la interacción entre la estructura principal y el sistema de control pasivo.

Los resultados obtenidos han servido para justificar las decisiones tomadas en el estudio, experimental y numérico, de una maqueta simplificada de un puente de tamaño reducido, sobre la cual se ha llevado a cabo un análisis modal para obtener las primeras frecuencias naturales y sus modos asociados.

De esta manera, el proyecto presenta tanto la importancia del control de vibraciones en las estructuras de la ingeniería civil, como la utilidad del análisis modal, tanto en la descripción del comportamiento oscilatorio de una estructura, como en el desarrollo de métodos para obtener su respuesta ante ciertos tipos de excitaciones, como es el caso del análisis modal – espectral en el caso del análisis de respuestas ante sismos.

10. Bibliografia

- Ali Mikael. *Evaluation des paramètres physiques des bâtiments : amortissement, fréquence et modes de comportement des structures de génie civil : approche expérimentale*. Sciences de la Terre. Université de Grenoble, 2011. Français. [1]
- A. V. Sutar, G. C. Mekalke. *Modal Analysis of Cantilever Beam for Various Cases and its Analytical and FEA Analysis*. International Journal of Engineering Technology, Management and Applied Sciences. Volume 4, Issue 2, February 2016. English. [2]
- Ching-Chang Chang, Dennis C. K. Poon, Leonard M. Joseph, Shaw-song Shieh. *Structural Design of Taipei 101, the World's Tallest Building*. Council of Tall Buildings and Urban Habitat. 2004. English. [3]
- J. E. Hurtado. *Dinámica de Estructuras. Aplicaciones a la Ingeniería Sísmica*. Universidad Nacional de Colombia. Español. [4]
- Jozef Bocko, Martin Hagara, Pavol Lengvarský. *Modal Analysis of Titan Cantilever Beam Using ANSYS and SolidWorks*. Department of Applied Mechanics and Mechatronics. Technical University of Košice. 2013. English. [5]
- Mark Austin. *Modal Analysis of a 4 Story Shear Building*. Department of Civil Engineering. University of Maryland. 1996. English [6]
- Michalis Fragiadakis. *Response Spectrum Analysis of Structures Subjected to Seismic Actions*. National Technical University of Athens. 2013. English. [7]
- Olkan Cuvalci. *The Effect of Detuning Parameters on the Absorption Region for a Coupled System: A Numerical and Experimental Study*. Journal of Sound and Vibration (2000), 229 (4), 837 – 857. English. [8]
- Othman Ben Mekki. *Amortissement semi-actif des structures flexibles*. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2006. English. [9]
- Sylvain Drapier. *Dynamique des Solides et des Structures. 5^{ème} édition*. Département Mécanique et Procédés d'Elaboration. École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne. 2016. Français. [10]
- Tom Irvine. *The Tacoma Narrows Bridge Failure. Revision A*. 2009. English [11]
- Viviana Meruane. *Vibraciones Mecánicas. Apuntes para el curso ME4701*. Departamento de Ingeniería Mecánica. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Universidad de Chile. 2012. Español. [12]
- Apuntes de la asignatura *Geometría diferencial i ecuacions diferencials*. ETSECCPB, UPC. Español. Versión curso 2015 – 2016. Español. [13]